УДК 621.7

КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Гринкевич В. А. /д. т. н./

Национальная металлургическая академия Украины

Сучасні математичні моделі (концепції) процесів металів тиском зазвичай включають в себе наступні компоненти: система рівнянь, що описує процес (рівняння, що описують власне пластичну деформацію; рівняння, що описують тепловий стан металу; рівняння, що описують розвиток мікроструктури); початкові умови; граничні умови.

Будь-яка математична модель базується на деякому спрощення фізичних процесів, які вона описує. Спрощення (або допущення) багато в чому визначають адекватність, по суті, якість цих моделей.

Основні допущення, що лежать в основі сучасних моделей, відносяться до: механіки деформованого твердого тіла; теплофізики; фізики пластичної деформації полікристалічного тіла; початкових умов; граничних умов.

Якщо обмежитися тільки механікою і теплофізикою процесу обробки металів тиском, то головні проблеми математичних моделей представляються такими: відсутність адекватної математичної теорії великих пластичних деформацій; відсутність співвідношень, що безпосередньо пов'язують деформаційну і теплову крайові задачі; недостатнє опрацювання швидких алгоритмів розв'язання крайових задач ОМД, в т.ч. в режимі реального часу.

Якщо перша і друга зазначені вище проблеми є фундаментальними, то третя носить прикладний характер. Її вирішення можливе при подальшому опрацюванні, зокрема, методів прямого розв'язання, що розробляються в середині 2000-х років.

***Ключові слова:** крайова задача, граничні умови, методи розв'язання.*

A modern mathematical models (conceptions) of the metal forming processes typically includes the following components: the system of equations describing the process (the equations that describe the proper plastic deformation; the equations that describe the thermal state of the metal; the equations that describe the evolution of the microstructure); initial conditions; boundary value conditions.

Any mathematical model is based on a certain simplification of the physical processes that it describes. Simplifying (or assumptions largely determine the value, in fact, the quality of these models).

The key assumptions underlying the current models are as follows: in the field of mechanics of the deformed solid body; in the field of thermal physics; in the field of plastic deformation of polycrystalline Physics; in the area of initial conditions; in the area of the boundary conditions.

If we confine ourselves only to mechanics and thermal physics of metal forming processes, the main problems of mathematical models are presented as follows: lack of adequate mathematical theory of large plastic deformations; the lack of equations, directly linking the deformation and thermal boundary value problems; insufficient elaboration of fast algorithms for solving boundary value problems of metal forming, including in real time.

If the first and second problems mentioned above are fundamental, the third is essentially an applied nature. Its resolution is possible with further development, in particular, direct solution methods, developed in the mid-2000s.

***Key words:** boundary value problem, boundary conditions, solution methods.*

Современные математические модели (концепции) процессов обработки металлов давлением обычно включают в себя следующие компоненты: система уравнений, описывающая процесс (уравнения, описывающие собственно пластическую деформацию; уравнения, описывающие тепловое состояние металла; уравнения, описывающие развитие микроструктуры); начальные условия; граничные условия.

Любая математическая модель базируется на некотором упрощении физических процессов, которые она описывает. Упрощения (или допущения во многом определяют адекватность, по сути, качество этих моделей).

Основные допущения, лежащие в основе современных моделей, относятся к: механике деформированного твердого тела; теплофизике; физике пластической деформации поликристаллического тела; начальным условиям; граничным условиям.

Если ограничиться только механикой и теплофизикой процесса обработки металлов давлением, то главные проблемы математических моделей представляются следующими: отсутствие адекватной математической теории больших пластических деформаций; отсутствие соотношений, непосредственно связывающих деформационную и тепловую краевые задачи; недостаточная проработка быстрых алгоритмов решения краевых задач ОМД, в т. ч. в режиме реального времени.

Если первая и вторая указанные выше проблемы являются фундаментальными, то третья носит существенно прикладной характер. Ее разрешение возможно при дальнейшей проработке, в частности, методов прямого решения, разработанных в середине 2000-х годов.

***Ключевые слова:** краевая задача, граничные условия, методы решения.*

Введение. Обработка металлов давлением, в частности, ковка и объемная штамповка относятся к числу наиболее важных и распространенных видов обработки металлов: номенклатура кованых и штампованных поковок сегодня достигает более миллиона типоразмеров и это количество продолжает увеличиваться. В результате создание новых технологий на основе предыдущего производственного опыта затрудняется. В этих условиях существенно возрастает роль расчетных методов.

Современные численные методы решения краевых задач пластического деформирования в упруго-пластической или жестко–пластической постановке, которые по сути являются краевыми, позволяют получить необходимую информацию о кинематических, деформационных и силовых параметрах для проектирования, в частности, выше указанных процессов обработки металлов давлением.

В системах оперативного управления процессами ковки гладких и ступенчатых валов на автоматизированных ковочных комплексах, как правило, применяются алгоритмы, основанные на обработке данных лабораторных и промышленных экспериментов. Такие алгоритмы пригодны для работы в узком диапазоне параметров технологических процессов: при их изменении требуется проведение новых экспериментов и обработка их результатов. Соответствующая математическая модель управления, основанная на решении краевой задачи, должна работать в режиме реального времени. Известные численные методы (конечных элементов, граничных элементов) из-за присущей им ресурсоемкости непригодны для решения задач оперативного управления процессами ковки.

Кроме того, при средне- и крупносерийном кузнечно-штамповочном производстве из-за случайного изменения технологических параметров могут возникать трещины, зажимы металла и другие дефекты, что приводит к существенным потерям металла в виде брака. Следовательно, существует необходимость экспресс-анализа – быстрого и точного определения параметров напряженно-деформированного состояния в особых точках очага пластической деформации, опасных с точки зрения возникновения указанных выше дефектов.

Необходимо также отметить, что численные методы решения краевых задач обработки металлов давлением предполагают проведение большого количества последовательных приближений (итераций), каждая из которых требует большого количества вычислений. Даже на современных мощных персональных компьютерах время решения таких задач исчисляется часами и сутками, что не всегда является приемлемым. Это приводит к увеличению общего времени, необходимого для проектирования новых технологических процессов.

Поэтому проблема разработки методов решения краевых задач пластического деформирования, которые сочетали бы точность современных численных методов со скоростью решения, достаточной для систем управления процессами свободной ковки в режиме реального времени, представляется актуальной.

Цель работы. Целью работы является формулировка альтернативной концепции решения краевых задач обработки металлов давлением путем выработки основных ее идей.

Актуальный уровень техники и исследований. Современные математические модели (концепции) процессов обработки металлов давлением обычно включают в себя следующие компоненты:

- система уравнений, описывающая процесс (уравнения, описывающие собственно пластическую деформацию; уравнения, описывающие тепловое состояние металла; уравнения, описывающие развитие микроструктуры);
- начальные условия;
- граничные условия.

При этом чаще всего уравнения, описывающие механику пластической деформации, представляют собой функционалы работы или мощности Лагранжа или Маркова-Германа. В качестве примера можно привести работы [1, 2]. Можно утверждать, что вариационные формулировки в настоящее время применяются почти повсеместно, формулировки, основанные на условиях глобального силового равновесия – редко. Вместе с тем, подход, основанный на глобальном равновесии пластически деформированного тела обладает рядом привлекательных для исследователя качеств. В частности, разработан метод решения краевых жесткопластических задач, который, в частности, базируется на следующем теоретическом положении (**теореме о краевой жесткопластической задаче**).

Постановка задачи. В опубликованной ранее работе [3], сформулировано следующее утверждение: *"Для краевой жесткопластической задачи с корректно заданными граничными условиями существует разрешающая система уравнений, линейная относительно неизвестных данной задачи"*.

Как известно, краевая задача линейной упругости (вязкости) может быть корректно сформулирована в виде системы граничных интегральных уравнений:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ik}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ik}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV\,, \qquad (1)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ik}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V T_{ik}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV\,. \qquad (2)$$

Переход к физически нелинейной краевой задаче производится путем добавления поля фиктивных объемных сил, $F_k^{*доп.}(E,\tau)$, распределенных таким образом, чтобы напряженно-деформированное состояние в любой точке тела V соответствовало реальной жесткопластической среде с заданными реологическими свойствами, т. е. чтобы выполнялось также и уравнение связи:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)F_k^{*доп.}(E,\tau)dV, \quad (3)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F(E,\tau)dV+\int_V T_{ij}(x,\tau)F_k^{*доп.}(E,\tau)dV. \quad (4)$$

В уравнениях (3) и (4) неизвестными являются распределение интенсивности фиктивных нагрузок $t_k^*(E,\tau)$ на поверхности S и распределение интенсивности фиктивных дополнительных объемных сил $F_k^{*доп.}(E,\tau)$ внутри V.

Если известно распределение $F_k^{*доп.}(E,\tau)$, то уравнения (3) и (4) определяют решение любой корректно поставленной краевой **жесткопластической** задачи.

Таким образом, проведена непрямая формулировка краевой жесткопластической задачи в виде граничных интегральных уравнений. Интегральные уравнения (3) и (4) в общем случае являются нелинейными вследствие нелинейности реологических свойств жесткопластической среды.

Поскольку при выполнении условия сплошности, компоненты напряженно-деформированного состояния в любой точке деформированного тела являются непрерывными, то непрерывным является и распределение $F_k^{*доп.}(E,\tau)$. Следовательно, можно воспользоваться обобщенной теоремой о среднем значении определенного интеграла и записать выражения (3) и (4) следующим образом:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+F_k^{*доп.ср.}(\tau)\int_V V_{ij}(x,E,\tau)dV, \quad (5)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+F_k^{*доп.ср.}(\tau)\int_V T_{ij}(x,\tau)dV, \quad (6)$$

где $F_k^{*доп.ср.}(\tau)$ – средне интегральное значение проекции вектора фиктивных дополнительных объемных сил.

Уравнения (5) и (6) являются **линейными** относительно неизвестных краевой задачи. Однако, поскольку были введены дополнительные неизвестные краевой задачи, для замыкания разрешающей системы необходимы дополнительные уравнения.

В качестве дополнительных уравнений используем условие глобального равновесия:

$$\int_S t_k^*(E,\tau)dS+\int_V F_k(E,\tau)dV+F_k^{*доп.ср.}(\tau)\int_V dV=0. \quad (7)$$

Физический смысл уравнения (7) заключается в следующем: сумма равнодействующих от всех фиктивных нагрузок должны быть равны нулю в направлении осей выбранной системы координат. Таких уравнений необходимо три для объемной задачи и два – для двумерной.

Таким образом, получена замкнутая разрешающая система линейных уравнений (5)-(7) краевой жесткопластической задачи с корректно заданными граничными условиями.

Здесь необходимо дать дополнительные пояснения. В некоторых случаях одно из условий обобщенной теоремы о среднем (а именно, неизменность знака функции, которая остается под знаком интеграла) может не выполняться. В этих случаях решение системы (5)-(7), полученной в [3], будет приближенным решением краевой задачи.

Преобразуем систему (3)-(5) несколько иначе. Дополнительно приложим к телу две равномерно распределенные объемные силы, имеющие одинаковую плотность распределения С и противоположные по знаку. Тогда имеем:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C-C)dV, \quad (8)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+\int_V T_{ij}(x,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C-C)dV. \quad (9)$$

В силу аддитивности определенного интеграла:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$

$$+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V V_{ij}(x,E,\tau)C)dV; \quad (10)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+\int_V T_{ij}(x,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V T_{ij}(x,\tau)CdV. \quad (11)$$

Предположим, что величина С такова, что заведомо обеспечивается неизменность (положительность) знака ($F_k^{*доп.}(\tau)+C$). Заметим также, что для сингулярных функций (функций влияния) существует интеграл в смысле главного значения Коши. Тогда условия обобщенной теоремы о среднем будут выполнены и выражения (10) и (11) преобразовываются к виду:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$

$$+V_{ij}^{ср.}(x,E,\tau)\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V V_{ij}(x,E,\tau)C)dV; \quad (12)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+T_{ij}^{ср.}(x,\tau)\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V T_{ij}(x,\tau)CdV. \quad (13)$$

Условие глобального равновесия (8) в этом случае принимает следующий вид:

$$\int_S t_k^*(E,\tau)dS + \int_V F_k(E,\tau)dV + \int_V (F_k^{*\partial on.}(\tau)+C)dV - \int_V CdV = 0. \qquad (14)$$

Таким образом, получена разрешающая система уравнений, также линейная относительно неизвестных краевой задачи, но вместо усредненной дополнительной объемной силы появляется другая неизвестная – $\int_V (F_k^{*\partial on.}(\tau)+C)dV$, которая является компонентой равнодействующей дополнительных объемных сил с точностью до постоянной.

Решение системы (12)-(14) и будет решением корректно сформулированной жесткопластической задачи.

Основной материал исследования. Таким образом, сформулирована *первая идея* альтернативной концепции: **краевая задача формулируется в виде линейной системы интегральных уравнений**. Само по себе это позволяет весьма значительно снизить требуемые вычислительные ресурсы. *Вторая идея* базируется на важной особенности линеаризованной гранично-интегральной формулировки краевых задач, а именно, на возможность решать краевые задачи только для некоторых заданных точек границы деформированного тела.

Сформулируем следующее утверждение (названое автором **обобщённой теоремой состояния**).

Если для жесткопластического тела, находящегося в состоянии равновесия под воздействием системы внешних нагрузок, корректно заданы граничные условия, то неизвестные компоненты векторов скорости и напряжения в любой заданной точке его границы определяются непосредственно, т. е. без решения соответствующей краевой задачи.

Доказательство.

1. Мысленно разобьем границу деформированного тела на конечное число участков – граничных элементов, к каждому из которых приложим равномерно распределенные кельвиновские сосредоточенные силы [2]. Приложим также систему дополнительных объемных сил для удовлетворения уравнениям связи в рамках теории течения Сен-Венана–Леви–Мизеса. Тогда, в силу теоремы о краевой жесткопластической задаче будут справедливы системы уравнений (12 - 14) для жесткопластического тела. Предположим, что дискретизация границы позволяет получить решение с требуемой точностью. Предположим также, что дискретизация границы такова, что в пределах каждого линейного участка, аппроксимирующего границу, распределение поверхностных фиктивных нагрузок будет близко к линейному. Проведя вычисление коэффициентов влияния от всех фиктивных нагрузок на компоненты кинематического и напряженно-деформированного состояния в заданной точке границы, получим стандартную разрешающую систему непрямого метода граничных элементов.

2. При помощи матричных преобразований определим компоненты фиктивных нагрузок, приложенных в заданной точке границы, в характерных точках границы (см. п. 1 доказательства), а также компоненты дополнительных объемных сил. Заметим, что определенные таким образом компоненты фиктивных нагрузок будут **точными** (в пределах погрешности дискретизации и ошибки округления).

3. Скорректируем коэффициенты влияния фиктивных нагрузок, приложенных в характерных точках границы таким образом, чтобы соответствующий участок границы представлял собой уже один граничный элемент. В частности, при кусочно-линейной аппроксимации границы соответствующий коэффициент влияния просто умножается на количество граничных элементов, на которое был первоначально разбит данный участок границы. Заметим, что если исходная дискретизация границы обеспечивает линейное распределение фиктивных нагрузок вдоль данного участка границы, то сведение этого линейного участка к одному граничному элементу будет **статически эквивалентным**.

4. С учетом этого запишем выражения для определения искомых компонентов векторов скорости и напряжения:

$$V_i^k = a_i^{k\cdot own}P_i^{k\cdot own} + a_i^{k\cdot other}P_i^{k\cdot other} + c_i^{k\cdot add}F_i^{k\cdot add}, \qquad (15)$$

$$t_i^k = b_i^{k\cdot own}P_i^{k\cdot own} + b_i^{k\cdot other}P_i^{k\cdot other} + d_i^{k\cdot add}F_i^{k\cdot add}, \qquad (16)$$

где индекс «own» относится к фиктивным нагрузкам, приложенным в заданной точке границы; индекс «other» относится к фиктивным нагрузкам, приложенным в характерных точках границы; индекс «add» относится к дополнительным объемным силам.

И, наконец, определим искомые компоненты векторов скорости и напряжений при помощи выражений (15 - 16). Поскольку в этих выражениях все фиктивные нагрузки и коэффициенты влияния получены путем тождественных преобразований и статически эквивалентных замен, то (с учетом сделанных допущений) полученные таким образом неизвестные компоненты векторов скорости и напряжения в заданной точке границы будут точным решением исходной краевой задачи в заданной точке границы. Кроме того, при этом не производится определение неизвестных по всей границе деформированного тела, т. е. не производится решение краевой задачи в обычном понимании. Следовательно, условия теоремы выполнены.

Отметим, что обобщенная теорема состояния может быть практически использована при различных типах граничных условий, включая смешанные.

Следовательно, сформулирована *вторая идея* альтернативной концепции: **краевая задача решается только в интересующих исследователя точках границы тела и внутри его**. Это также весьма значительно сократит требуемые вычислительные ресурсы.

Третья идея вытекает из особенностей гранично-элементной дискретизации: граница деформированного тела с требуемой точностью решения может быть описана относительно грубой сеткой, состоящей из прямых линий (для двумерной краевой задачи) или плоскостей (для трехмерной).

Таким образом сформулирована концепция решения краевых задач теории пластичности (обработки металлов давлением), позволяющая резко снизить вычислительные ресурсы с достижением требуемой точности.

ВЫВОДЫ

1. Краевая задача может быть сформулирована в виде линейной системы интегральных уравнений, как следствие, в виде линейной алгебраической системы.
2. Краевая задача может быть решена только в интересующих исследователя точках границы тела и внутри его.
3. Граница деформированного тела с требуемой точностью решения может быть описана относительно грубой сеткой, состоящей из прямых линий (для двумерной краевой задачи) или плоскостей (для трехмерной).
4. Три изложенных выше теоретических положения (идеи) составляют альтернативную концепцию решения краевых задач теории пластичности (обработки металлов давлением), которая позволяет резко снизить вычислительные ресурсы с достижением требуемой точности.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Данченко В. Н. Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением / В. Н. Данченко, А. А. Миленин, В. И. Кузьменко, В. А. Гринкевич. – Дніпропетровськ : Системні технології, 2005. – 488 с.
2. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках, пер. с англ / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд – М.: Мир, 1984. – 494 с.
3. Гринкевич В. А. Теоретическое обоснование и алгоритм реализации дискретного метода прямого решения краевых задач пластического деформирования/ В. А. Гринкевич, Д. В. Коноводов, О. М. Кузьмина // Системні технології. Регіональний межвузівський збірник наукових праць. – 2009. – Вип.2 (61). – С. 21-28.